وبالتالي يكون:

$$\|\tilde{A}\| \le \|A\| \qquad (14)$$

من المتراجحتين (13) و(14) نستنتج أن $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ وهو المطلوب.

(٥-٩) المؤثرات الخطية ومبرهنة البيان المغلق:

(Closed graph theorem)

بما أن للمؤثرات الخطية غير المحدودة أهمية لا تقل عن المؤثرات الخطية المحدودة كالمؤثر التفاضلي مثلاً في مجال الرياضيات التطبيقية فلقد دعت الحاجة إلى دراسة مجموعة قيم المؤثر بعد تطبيقه على فضاء ما معين لتحديد سلوك العديد من المؤثرات.

تعريف (٢٠):

ليكن E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين، وليكن A مؤثراً خطياً ساحته $E_1 \supset D(A)$ بحيث $A : D(A) \longrightarrow E_2$.

نقول عن المؤثر A إنه مؤثر خطي مغلق إذا كان بيانه $G(A)$ حيث:

$$G(A) = \{ (\xi_1, \xi_2) \ : \ \xi_1 \in D(A) \ , \ \xi_2 = A\,\xi_1 \}$$

مغلقاً في الفضاء المنظم $E_1 \times E_2$.

في الفضاء المنظم $E_1 \times E_2$ تعرف العمليتان الجبريتان بالشكل:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

حيث α عدد ما. ويعرف النظيم $E_1 \times E_2$ بالمساواة:

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad (15)$$

مبرهنة (١٦):

ليكن B_1 و B_2 فضاءي باناخ وليكن المؤثر T حيث:

$$T : D(T) \longrightarrow B_2 \ ; \ D(T) \subset B_1$$

مؤثراً خطياً مغلقاً، إذا كانت $D(T)$ مغلقة في B_1 عندئذ يكون المؤثر T محدوداً.

الإثبات:

لنثبت أولاً أن المجموعة $B_1 \times B_2$ مع النظيم (15) تشكل فضاءً تاماً.

لتكن $\{Z_n\}$ متتالية كوشي في الفضاء $B_1 \times B_2$ حيث $Z_n = (x_n, y_n)$، عندئذ يوجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح N بحيث يكون:

$$\|Z_n - Z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon \quad ; (m, n > N) \quad (16)$$

لذلك فإن كلاً من $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتالية كوشي في B_1 و B_2 على الترتيب.

كما أن هاتين المتتاليتين متقاربتين وليكن مثلاً $x_n \longrightarrow x$ & $y_n \longrightarrow y$ لأن B_1 و B_2 تامان. وهذا يؤدي إلى أن:

$$Z_n \longrightarrow Z = (x, y)$$

إذن من (16) ومن أجل $n > N$ و $m \longrightarrow \infty$ نجد:

$$\|Z_n - Z\| < \varepsilon$$

وبما أن متتالية كوشي $\{Z_n\}$ اختيارية إذن الفضاء $B_1 \times B_2$ تام.

إن البيان $G(T)$ مغلق في $B_1 \times B_2$ فرضاً، وبما أن $D(T)$ مغلقة في B_1 عندئذ يكون $G(T)$ و $D(T)$ تامان.

لنأخذ الآن التطبيق A المعرف بالشكل:

$$A : G(T) \longrightarrow D(T)$$

حيث: $A(x, Tx) = x$

إن المؤثر A خطي ذلك لكون $G(T)$ مغلقاً في $B_1 \times B_2$، وبالتالي من أجل أي عنصرين (x_1, Tx_1) و (x_2, Tx_2) من $B_1 \times B_2$ يكون لدينا:

$$A\left((x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2)\right) = A(x_1 + x_2, Tx_1 + Tx_2) = x_1 + x_2$$
$$= A(x_1, Tx_1) + A(x_2, Tx_2)$$

كما أنه من أجل أي عدد α يكون:

$$A(\alpha(x_1, Tx_1)) = A(\alpha x_1 + \alpha T x_1) = \alpha x_1 = \alpha A(x, Tx_1)$$

كما أن التطبيق A محدود لأن:

$$\|A(x,Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|$$

بما أن A متباين وغامر إذن له تطبيق عكسي A^{-1} معرف بالشكل:

$$A^{-1}: D(T) \longrightarrow G(T)$$

حيث: $A^{-1}(x) = (x,Tx)$

ولما كان $G(T)$ و $D(T)$ تامان عندئذٍ A^{-1} هو مؤثر محدود.

ذلك اعتماداً على المبرهنة (المرجع [٣] ص ٣٦٧): إذا كان A مؤثراً خطياً محدوداً من فضاء باناخ B_1 إلى فضاء باناخ B_2 بحيث يصور أي مجموعة مفتوحة من $D(A)$ في مجموعة مفتوحة في B_2 (أي تطبيق مفتوح) وكان A متبايناً وغامراً فإن A^{-1} مستمر ومحدود.

أي أنه من أجل عدد ما C (هنا $C > 1$) يكون:

$$\|(x,Tx)\| \le C\|x\| \quad ; \quad \forall x \in D(T)$$

أي:

$$\|(x,Tx)\| = \|x\| + \|Tx\| \le C\|x\| \Rightarrow \|Tx\| \le (C-1)\|x\|$$

وهذا يعني أن المؤثر T محدود.

١- خاصة المؤثر الخطي المغلق (Closed linear operator property):

إذا كان A مؤثراً خطياً من الفضاء الخطي المنظم E_1 في الفضاء الخطي المنظم E_2، عندئذٍ الشرط اللازم والكافي كي يكون A مغلقاً هو أن تتحقق الخاصة التالية:

إذا كان $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ & $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ حيث إن المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ فإن $Ax = y$ & $x \in D(A)$.

هذه الخاصة تعد من أهم المعايير التي تؤخذ لإثبات انغلاق مؤثر خطي.

ملاحظة (١٤):

نعلم أنه إذا كان A مؤثراً خطياً محدوداً (وبالتالي مستمراً) وكانت المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ متقاربة في $D(A)$، عندئذٍ تكون المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة أيضاً.

بيد أن هذه الخاصة للمؤثر المستمر ليس من الضرورة أن تكون صحيحة في حال المؤثر

الخطي المغلق. ولكن إذا كان A مؤثراً مغلقاً وكان كل من المتتاليتين $\{x_n^1\}$ و $\{x_n^2\}$ من $D(A)$ متقاربتين من نهاية واحدة x وكان كل من المتتاليتين $\{Ax_n^1\}$ و $\{Ax_n^2\}$ متقاربتين فعندئذٍ لكلا المتتاليتين $\{Ax_n^1\}$ و $\{Ax_n^2\}$ نهاية واحدة.

مثال (٥) :

لنأخذ المؤثر A حيث: $A : D(A) \longrightarrow C[0,1] \quad ; \quad D(A) \subseteq C[0,1]$

فمن المعروف أن المؤثر التفاضلي المعرف بالشكل:

$$Ax(t) = x'(t) \quad ; \quad x(t) \in D(A)\,,\, t \in [0,1]$$

غير محدود (انظر (٥-١-٢) مثال ٦) ولكنه مؤثر مغلق. فمن أجل إثبات ذلك لنأخذ المتتالية $D(A) \supseteq \{x_n\}$ بحيث تكون المتتالية $\{x_n\}$ والمتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربتين أي ليكن:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \& \quad y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x'_n(t) = x(t).$$

وبما أن التقارب بالنظيم في $C[0,1]$ هو تقارب منتظم على المجال $[0,1]$ عندئذٍ يكون:

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x'_n(\tau)d\tau = \lim_{n\to\infty}\int_0^t x'_n(\tau)d\tau$$
$$= x(t) - x(0)$$

أي أن:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)d\tau$$

وهذا يعني أن $D(A) \ni x(t)$ وأن $x'(t) = y$ وبالتالي نستنتج أن T مغلق.

ملاحظة (١٥) :

الساحة $D(A)$ غير مغلقة في $C[0,1]$ لأنه لو كانت مغلقة لكان A محدوداً حسب المبرهنة (١٦) .

ملاحظة (١٦) :

العكس في الملاحظة (١٤) ليس من الضرورة أن يكون صحيحاً، أي أن المحدودية لا

تقتضي الانغلاق. فلو أخذنا المؤثر I (المؤثر المطابق) من الفضاء الخطي المنظم E في نفسه، فمن المعروف أن المؤثر المطابق خطي ومحدود إلا أنه غير مغلق وذلك لو أخذنا المتتالية $\{x_n\} \subset D(I)$ متقاربة من عنصر x حيث x من $\{E - D(I)\}$ لوجدنا أن خاصة المؤثر الخطي المغلق غير محققة من أجل هذا الاختيار وبالتالي I غير مغلق.

مثال (٥) :

لنأخذ في الفضاء ℓ_2 المؤثر S حيث :

$$Se_n = ne_1 \quad ; \quad e_n = (\underbrace{0,0,\ldots,0,1}_{n},0,0,\ldots.) \quad , \; n = 1,2,3,\ldots$$

من الواضح إن $D(S)$ هي المتتالية e_n ، وإن النقاط $(\frac{e_n}{n}, e_1)$ تنتمي لبيان المؤثر S وبذلك فإن $(0, e_1)$ نقطة من لصاقة البيان أي من $\overline{G(S)}$. بمعنى آخر $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e_n}{n} = 0$ وإن $0 \notin D(S)$ أي أن خاصة المؤثر الخطي المغلق غير محققة من أجل هذا الاختيار وبالتالي S غير مغلق.

$(\frac{e_n}{n}, e_1) \in G(S)$ ≠

غير محكم $(0, e_1) \in \overline{G}(S)$

مبرهنة (١٧) : دوري

ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً من الفضاء الخطي المنظم E_1 في الفضاء الخطي المنظم E_2، عندئذ:

I - إذا كانت $D(A)$ مغلقة في الفضاء E_1 عندئذ يكون A مغلقاً.

II- إذا كان E_2 فضاءً تاماً وكان المؤثر A مغلقاً عندئذٍ تكون $D(A)$ مجموعة جزئية مغلقة في E_1 .

الإثبات:

I- لتكن المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ متقاربة من x، ولتكن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة أيضاً. وبما أن $D(A)$ مغلقة عندئذ يكون:

$$x \in \overline{D(A)} = D(A)$$

ويكون أيضاً $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$ ذلك لأن A مؤثر مستمر.

بالاعتماد على خاصة المؤثر المغلق نستنتج أن A مؤثر مغلق.

II- لنأخذ أي عنصر $x \in \overline{D(A)}$ وبالتالي نوجد متتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ بحيث يكون

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. بما أن A مؤثر خطي محدود إذن:

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\| \|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$$

أي أن المتتالية $\{Ax_n\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء E_2. وبما أن الفضاء E_2 تام عندئذٍ المتتالية $\{Ax_n\}$ تتقارب من عنصر في E_2 وليكن y أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$$

وبما أن A مغلق، وبحسب خاصة المؤثر الخطي المغلق يكون $x \in D(A)$ كما أن $Ax = y$. لذلك فإن $D(A)$ مغلقة ذلك كون العنصر x اختيارياً من $\overline{D(A)}$.

(٥-١٠) تمارين محلولة :

تمرين محلول (١) :

الفصل السادس

الداليات الخطية

Linear functionals

تلعب الداليات دوراً أساسياً وهاماً في التحليل الرياضي. وندرس في هذا الفصل الداليات في نطاق التحليل الدالي، ونخص منها الداليات الخطية كما نولي الاهتمام الأكبر بالداليات في الفضاءات المنظمة.

(٦-١) بعض المفاهيم الأساسية:

ليكن E فضاءً خطياً حقيقياً (أو عقدياً) عندئذٍ كل تطبيق f من الشكل:

$$f : E \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$x \mapsto f(x)$$

سنسميه دالياً على E، حيث هنا:

$\mathcal{F} = \mathbb{R}$ إذا كان الفضاء E حقيقياً، وفي هذه الحالة نسمي f دالياً حقيقياً.

$\mathcal{F} = \mathbb{C}$ إذا كان الفضاء E عقدياً، وفي هذه الحالة نسمي f دالياً عقدياً.

اعتماداً على تعريف المؤثر في الفصل الخامس نلاحظ أن الدالي الخطي هو حالة خاصة من المؤثر الخطي حيث إن الدالي الخطي هو مؤثر خطي من الفضاء الخطي E إلى فضاء الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (عندما يكون الفضاء E حقيقياً) أو إلى فضاء الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ (عندما يكون الفضاء E عقدياً)، وبذلك تنطبق مفاهيم الخطية والاستمرار للمؤثرات على الداليات.

تعريف (١):

ليكن f دالياً على الفضاء الخطي E، نسمي f دالياً خطياً إذا كان:

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y); \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathcal{F}$$

ملاحظة (١):

ليكن f دالياً خطياً على الفضاء الخطي E. عندئذٍ المجموعة M:

$$M=\{x\in E : f(x)=0\}$$

تشكل فضاءاً خطياً جزئياً من E (تأكد من ذلك).

تعريف (٢) :

ليكن f دالياً على الفضاء الخطي المنظم E.

(أ) نسمي f دالياً محدوداً إذا وجد ثابت $c\geq 0$ بحيث يكون:

$$|f(x)|\leq c\|x\| \quad ; \quad \forall x\in E \qquad (1)$$

(ب) إذا كان الدالي f محدوداً على E فنسمي أصغر عدد c يحقق المتراجحة (1) بنظيم الدالي f ونرمز له بـ $\|f\|$.

ملاحظة (٢) :

إذا كان الدالي f محدوداً على الفضاء الخطي المنظم E فإن نظيم f يعطى بالعلاقة:

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq\theta}}\frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$$

وكذلك:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|_E=1}|f(x)|$$

ويكون أيضاً :

$$|f(x)|\leq\|f\|\,\|x\|_E \; ; \; x\in E$$

وقد نكتب أحياناً $\|f\|_E$ للدلالة على نظيم الدالي f المعرف على الفضاء E، وهنا يجب التمييز بين الرمزين $\|x\|_E$ و $\|f\|_E$، حيث يعني الأول نظيم العنصر $x\in E$ وقد ورد هذا مراراً وتكراراً فيما سبق .

بالنسبة لاستمرار الدالي في نقطة (أو على فضاء) فيبدو مشابهاً لاستمرار تابع عددي.

تعريف (٣) :

ليكن f دالياً على الفضاء الخطي E . نقول عن f إنه مستمر في النقطة $x_0\in E$ إذا كان $f(x_n)\xrightarrow[x_n\to x_0]{} f(x_0)$ وذلك من أجل أية متتالية $\{x_n\}$ من E بحيث $x_n\longrightarrow x_0$ وإذا كان الدالي f مستمراً في كل x من E فنقول إن f مستمر على E.

نذكر حسب المبرهنة (٢) من (٥-٢) أن الدالي الخطي f يكون مستمراً إذا كان محدوداً.

تمهيدية (١) :

إذا كانت المتتالية $\{c_n\} \in \ell_\infty$ و $\{x_n\} \in \ell_p$ حيث $1 \le p < \infty$ فإن:

$\{c_n x_n\} \in \ell_p$ وأن : $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \le \|\{c_n\}\|_{\ell_\infty}^p \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}_{\|\{x_n\}\|_{\ell_p}^p}$. صولدر .

الإثبات :

بما أن $\{c_n\} \in \ell_\infty$ و $\{x_n\} \in \ell_p$ عندئذٍ يكون: $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ وأن:

$$\lambda = \|\{c_n\}\|_{\ell_\infty} = \sup\{|c_n| \ : \ n \in N\} < \infty$$

بذلك فإن $|c_n x_n|^p \le \lambda^p |x_n|^p$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p$ متقاربة وفق اختبار المقارنة. لهذا

فإن $\{c_n x_n\} \in \ell_p$ وبهذا يتحقق المطلوب.

١- أمثلة على الداليات :

مثال (١) :

إذا كانت المتتالية $\{c_n\} \in \ell_\infty$ عندئذٍ الدالي الخطي $T : \ell_1 \longrightarrow \mathcal{F}$ المعرف بالعلاقة:

$T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ دالي مستمر.

الحل:

حسب التمهيدية ١ (حيث $p = 1$) فإن $\{c_n x_n\} \in \ell_1$ وبالتالي T معرف جيداً. كما أن :

$$|T(\{x_n\})| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \le \underbrace{\sup_n |c_n|}_{\|\{c_n\}\|_{\ell_\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$= \|\{c_n\}\|_{\ell_\infty} \cdot \|\{x_n\}\|_{\ell_1}$$

أي أن T مستمر.

مثال (٢) : هام

ليكن u_0 عنصراً مثبتاً من الفضاء R^n . ولنضع:

$T(2) = \sum c_n x_n$
$= x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \langle x, (1,2,3) \rangle$

$$f(x) = \langle x, u_0 \rangle \; ; \; x \in \mathbb{R}^n$$

عندئذٍ يمكننا التأكد بسهولة أن f دالي خطي حقيقي على $\mathbb{R}^n$ (ينتج هذا مباشرة من خواص الجداء الداخلي) وبحسب متراجحة شفارتز ((٤-١) مبرهنة١) يكون لدينا:

$$|f(x)| = |\langle x, u_0 \rangle| \leq \|u_0\| . \|x\| \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}^n$$

لذلك فإن الدالي f محدود وبالتالي مستمر على $\mathbb{R}^n$ (حسب تعريف ٣ أعلاه).

$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 5x_3$

ولنحسب نظيمه $\|f\|$.

$\langle (x_1, x_2, x_3), (2, 0, 5) \rangle$

لدينا:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|u_0\| \; ; \; x \in \mathbb{R}^n$$

$\|(1,2,3)\| = 3$

وبالتالي:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|u_0\| \qquad (2)$$

ومن ناحية ثانية لدينا:

$$|f(u_0)| = \langle u_0, u_0 \rangle = \|u_0\|^2$$

أي أن:

$$\frac{f(u_0)}{\|u_0\|} = \|u_0\|$$

وبذلك فإن:

$$\|f\| \geq \|u_0\| \qquad (3)$$

من (2) و (3) نجد أن: $\|f\| = \|u_0\|$.

مثال (٣) :

ليكن التكامل :

$$I(h) = \int_a^b h(x) dx \quad ; \; h \in C[a,b]$$

عندئذٍ I يمثل دالياً خطياً على $C[a,b]$ وينتج هذا من خطية التكامل.

ويكون:

$$|I(h)|=\left|\int_a^b h(x)dx\right|\le \max_{x\in[a,b]}|h(x)|.(b-a)$$

أي أن:

$$|I(h)|\le(b-a)\|h\|_c\ ;\ h\in C[a,b]$$

وهذا يعني أن الدالي I محدود. ومن المتراجحة الأخيرة نجد :

$$\|I\|\le b-a \qquad (4)$$

من ناحية ثانية لدينا من أجل $h(x)=1$:

$$I(1)=b-a$$

وبالتالي:

$$\|I\|=\sup_{\substack{h\in C[a,b]\\ \|h\|_c=1}}|I(h)|\ge b-a \qquad (5)$$

من (4) و (5) نجد أن: $\|I\|=b-a$

مثال (٤) :

يمكننا تعميم المثال السابق كما يلي:

ليكن $\varphi(x)$ تابعاً مثبتاً ومستمراً على المجال $[a,b]$. ولنضع :

$$F(h)=\int_a^b h(x)\phi(x)dx \quad ;\ h\in C[a,b]$$

عندئذٍ F يعرف دالياً خطياً ومحدوداً على $C[a,b]$. وهنا يكون:

$$\|F\|=\int_a^b|\phi(x)|dx$$

مثال (٥) :

لتكن x_0 نقطة مثبتة في المجال $[a,b]$. ولنضع:

$$\delta_{x_0}(h)=h(x_0)\ ;\ h\in C[a,b]$$

أي أن δ_{x_0} تعطي قيمة التابع المستمر $h(x)$ في النقطة $x=x_0$.

وهنا δ_{x_0} تعرف لنا دالياً خطياً على الفضاء $C[a,b]$ وهو محدود لأن:

$$\left|\delta_{x_0}(h)\right|=\left|h(x_0)\right|\leq \max_{x\in[a,b]}\left|h(x)\right|=\|h\|_c \;;\; h\in C[a,b]$$

وبذلك يكون:

$$\left\|\delta_{x_0}\right\|\leq 1 \qquad (6)$$

من ناحية ثانية يكون من أجل $h(x)=1$:

$$\delta_{x_0}(h)=1$$

وبالتالي يكون بحسب تعريف نظيم الدالي:

$$\left\|\delta_{x_0}\right\|\geq 1 \qquad (7)$$

من (6) و (7) نجد: $\left\|\delta_{x_0}\right\|=1$

مثال (٦) :

ليكن u_0 عنصراً مثبتاً من فضاء هيلبرت H. ولنضع:

$$F(x)=\langle x,u_0\rangle \;;\; x\in H$$

يمكن التحقق بسهولة أن F يمثل دالياً خطياً ومحدوداً على H، حيث:

$$\|F\|=\|u_0\|_H$$

وبشكل عام فإن كل دالي خطي محدود على فضاء هيلبرت H له الشكل:

$$F(x)=\langle x,u\rangle \;;\; x\in H$$

حيث العنصر $u\ni H$ معين بشكل وحيد ويكون:

$$\|F\|=\|u\|_H$$

٢- مفهوم التقارب الضعيف للداليات (weak convergence of functional):

درسنا في (٣-٧) تقارب المتتاليات في الفضاءات الخطية المنظمة وكذلك متتاليات كوشي (المتتاليات الأساسية) .

إضافة لذلك سنتعرف على مفهوم جديد هو التقارب الضعيف لهذه المتتاليات .

تعريف (٤) :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء الخطي المنظم E. نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ إنها متقاربة تقارباً ضعيفاً (أو تتقارب بضعف) من العنصر $x_0 \in E$ إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

وذلك من أجل أي دالي f خطي ومستمر على الفضاء E، وفي هذه الحالة نكتب:

$$x_n \xrightarrow{w} x_0$$

نسمّي x_0 النهاية الضعيفة للمتتالية $\{x_n\}$. ونقول إن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب بضعف من x_0.

مثال (٧) :

في فضاء هيلبرت ، الشرط اللازم و الكافي كي يكون $x_n \xrightarrow{w} x$ هو أن يكون : $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$ أيّاً كان z من هذا الفضاء. وذلك لأنّه يمكن تمثيل أي دالّي خطّي محدود f على فضاء هيلبرت بدلالة الجداء الداخلي على النحو التالي (انظر الفقرة (٨) لاحقاً من هذا الفصل) : $f(x) = \langle x, z\rangle$.

ملاحظة (٣) :

للتمييز بين التقارب الضعيف والتقارب (العادي) المدروس سابقاً في (٣-٧) فسوف نسمي الأخير بالتقارب القوي. وهنا نلاحظ أن التقارب القوي يؤدي إلى التقارب الضعيف و النهاية واحدة غير أن العكس ليس صحيحاً بشكل عام.

في الحقيقة إذا كانت $\{x_n\}$ تتقارب من x بقوّة هذا يعني أنّ: $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وهذا يقتضي أنّه أيّاً كان f دالياً خطياً ومستمراً فإنّ :

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\| \, \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبالتالي فإنّ : $x_n \xrightarrow{w} x$.

لكن في فضاءات باناخ المنتهية الأبعاد يتكافأ التقاربان القوي والضعيف وكذلك في بعض الفضاءات غير منتهية الأبعاد ونذكر على سبيل المثال الفضاء ℓ_1 حيث يتكافأ فيه التقاربان القوي والضعيف.

تعريف (٥) :

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الداليات الخطية المستمرة على الفضاء الخطي المنظم E. عندئذٍ تكون هذه المتتالية متقاربة تقارباً ضعيفاً من الدالي f_0 إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$$

وذلك من أجل كل $x \in E$. وإذا كان E فضاء باناخ فتكون $\{f_n\}$ متقاربة تقارباً ضعيفاً من الدالي f_0 إذا وفقط إذا كانت المتتالية $\{\|f_n\|\}$ محدودة وكان:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$$

وذلك من أجل كل مجموعة كثيفة من العناصر $x \in E$.

٣- الفضاء الثنوي (dual space):

عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على الفضاء الخطي X وندعوه بالفضاء الثنوي الجبري لـــ X ونرمز له بالرمز X'. وتعرف العمليتان الجبريتان عليه على النحو الآتي:

$$(f_1+f_2)x = f_1(x)+f_2(x) \quad ; \forall f_1, f_2 \in X',\ x \in X$$
$$(\alpha f)x = \alpha . f(x) \quad ; f \in X',\ \alpha \in \mathcal{F},\ x \in X$$

٤- الفضاء الثنوي الثاني (bidual space):

عناصره الداليات الخطية المعرفة على X' وندعوه الفضاء الثنوي الثاني للفضاء الخطي X ونرمز له بالرمز $(X')'$ أو X''.

وسبب التطرق للفضاء X'' يكمن في أنه يمكن الحصول على علاقة هامة بين X و X''، وهذا سنراه لاحقاً في (٦-٤) .

٥- الفضاء المرافق (conjugate space) :

مجموعة الداليات الخطية المحدودة على الفضاء الخطي المنظم E ندعوها الفضاء المرافق لـــ E ونرمز له بالرمز E^* ويعرف النظيم في هذا الفضاء بالمساواة:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq \theta}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)| \qquad (٩)$$

ملاحظة (٤) :

من تعريف الفضاء X' عناصره داليات خطية لا يدخل فيه النظيم حيث X فضاء خطي.

أما تعريف E^{+} فيه E فضاء خطي منظم والنظيم يعطى في E^{+} وفق المساواة (8).

وسوف نقتصر في هذا الكتاب على استخدام رمز الفضاء المرافق كون جميع الفضاءات المدروسة هي فضاءات خطية منظمة .

ملاحظة (٥) :

$(E^{*})^{*} = E^{**}$ رمز للفضاء المرافق للفضاء E^{*}.

ملاحظة (٦) :

بناء على تعريف عمليتي جمع الداليات وضربها بعدد الواردة أعلاه يمكننا التحقق بسهولة أن E^{*} فضاء خطي منظم وذلك مع النظيم الوارد في العلاقة (٨) أعلاه. أما بالنسبة لتمام هذا الفضاء فلدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة (١):

ليكن E فضاء خطياً منظماً عندئذٍ يكون الفضاء المرافق له E^{*} فضاء خطياً منظماً وتاماً .

الإثبات:

سنبرهن التمام فقط.

لتكن $\{f_n\}$ متتالية كوشي في E^{*}. هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad for \quad n, m > n_0(\varepsilon)$$

وبالتالي من أجل أي $x \in E$ يكون:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|_E \qquad (9)$$

وبذلك تكون $\{f_n(x)\}$ متتالية كوشي عددية (متتالية أساسية) من أجل كل $x \in E$ وبالتالي فهي متقاربة. لنضع:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad ; \quad x \in E$$

ولنتأكد أن f دالي خطي ومستمر على E.

من أجل أي عنصرين x,y من E ومن أجل أي عددين λ و μ لدينا:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x+\mu y)=\lim_{n\to\infty}\left[\lambda f_n(x)+\mu f_n(y)\right]$$
$$=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

إذن f دالي خطي.

من المتراجحة (9) وعندما $n\longrightarrow\infty$ ومن أجل $n\ge n_0(\varepsilon)$ نجد أن:

$$\left|f(x)-f_m(x)\right|\le\varepsilon\|x\|_E \quad ; \quad x\in E \qquad (10)$$

وهذا يعني أن الدالي $(f-f_m)$ محدود وبالتالي مستمر على E. وبما أن:

$$f=f_m+(f-f_m)$$

فنجد أن f مستمر أيضاً. ويكون لدينا من (10) :

$$\|f-f_m\|\le\varepsilon \quad for \quad n\ge n_0(\varepsilon)$$

أي أن متتالية كوشي $\{f_n\}$ متقاربة في E^* من الدالي f وبما أن $\{f_n\}$ تمثل أي متتالية كوشي في E^*، إذن E^* تام وهو المطلوب.

ملاحظة (٧) :

المبرهنة (١) السابقة صحيحة سواء كان الفضاء E تاماً أو غير تام.

ملاحظة (٨):

نتساءل الآن عن كيفية إيجاد الفضاء المرافق E^* لفضاء خطي منظم E. في الواقع وبالرغم من أهمية السؤال فإن الإجابة ليست بالسهلة. والأمر متعلق بالفضاء المعطى E نفسه.

ففي كثير من الأحيان لا يمكن إيجاد جواب محدد على هذا التساؤل ذلك لكون الفضاء E والفضاء المرافق له E^* إيزومتريان (متقايسان). والفضاء E^* يمكن بناؤه بطرق مختلفة، كما يبين لنا المثال التالي:

مثال (٨):

في الفضاء الخطي المنظم $\mathbb{R}^n$ نأخذ النظيم:

$$\|x\| = |x_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \quad ; \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

(تأكد أن هذه العلاقة تعرف نظيماً على $\mathbb{R}^n$).

وليكن f دالياً خطياً معرفاً على $\mathbb{R}^n$ بالشكل:

$$f(x) = a_1 x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (x_{k+1} - x_k) \quad ; \; x \in \mathbb{R}^n$$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أية أعداد حقيقية.

عندئذ يكون الفضاء المرافق $\left(\mathbb{R}^n\right)^{*1}$ والنظيم فيه معطى بالعلاقة:

$$\|f\| = \max_{1 \le k \le n} |a_k|$$

أما إذا كان الدالي الخطي f معطى بالصيغة العامة – انظر (٦-١-١) مثال ٦ – أي:

$$f(x) = \langle x, b \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \quad ; \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

وهنا $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ عنصراً من $\mathbb{R}^n$ فيكون الفضاء المرافق $\left(\mathbb{R}^n\right)^{*2}$ مع النظيم:

$$\|f\| = \max_{1 \le k \le n} \left| \sum_{i=k}^{n} b_i \right|$$

وبما أن $\left(\mathbb{R}^n\right)^{*1}$ و $\left(\mathbb{R}^n\right)^{*2}$ إيزومتريان (متقايسان) فنحصل بالمطابقة بينهما على:

$$a_k \longleftrightarrow \sum_{i=k}^{n} b_i$$

وقد كتبنا 1* و 2* فقط للتمييز بين الفضاء المرافق في كل حالة.

نشير هنا إلى أننا في نهاية هذا الفصل سنوجد الفضاءات المرافقة لبعض الفضاءات الخطية المنظمة.

مبرهنة (٢) (باناخ – شتينهاوس) (للداليات الخطية) :

إذا كانت متتالية الداليات الخطية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على فضاء باناخ B محدودة في كل نقطة x من B، عندئذ تكون متتالية النظائم $\{\|f_n\|\}$ محدودة.

أهم شيء نظريات التمديد .

مبرهنة (٣) :

إذا كانت متتالية الداليات الخطية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على فضاء باناخ B هي متتالية كوشي (أساسية) في كل نقطة x من B، عندئذٍ يوجد دالي خطي مثل $f(x)$ بحيث يكون :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \quad ; \forall x \in B$$

(٦-٢) تمديد الداليات الخطية :(Extension of a linear functional)

تعريف (٦) :

ليكن M فضاء خطياً جزئياً من الفضاء الخطي E. وليكن f دالياً معرفاً على M. عندئذٍ الدالي $\tilde{f}$ المعرف على E والمحقق للشرط:

$$\tilde{f}(x)=f(x) \quad ; \quad x \in M$$

نسميه تمديداً (توسيعاً) لــ f.

تعريف (٧) :

ليكن p دالياً على الفضاء الخطي E. نسمي p دالياً خطياً جزئياً إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$p(x_1+x_2)\le p(x_1)+p(x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in E \quad \text{(i)}$$

$$p(\alpha x)=\alpha p(x) \ ; \ \forall x \in E, 0<\alpha<\infty \quad \text{(ii)}$$

لنبحث الآن في إمكانية تمديد الدالي الخطي.

ملاحظة (٩) :

الدالي الخطي الجزئي هو نصف نظيم حسب ما ورد في (٣-٣) إلا أن الشرط الثاني (ii) في الدالي الخطي الجزئي هو تجانس إيجابي ($0<\alpha$) .

مبرهنة (٤) – مبرهنة (هان – باناخ):

ليكن p دالياً خطياً جزئياً على الفضاء الخطي X وليكن f دالياً خطياً معرفاً على فضاء خطي جزئي S من X ويحقق الشرط:

$$f(s)\le p(s) \quad ; \quad \forall s \in S$$

عندئذٍ يوجد للدالي f ممدد خطي $\tilde{f}$ معرف على الفضاء X ~~بحيث يكون:~~

الحل العام
$\mathbb{R}^n$
ℓ_2
C_0
L_2

$$\begin{cases}\tilde{f}(x)\le p(x)\ ;\ \forall x\in X\\ \tilde{f}(s)=f(s)\ ;\ \forall s\in S\end{cases}$$

لن نعرض إثبات هذه المبرهنة ولكن نشير إلى أنه يمكن الاطلاع على الإثبات في المراجع العربية ([3] ص ٢٧٦) ، وسوف نعرض مبرهنة هان – باناخ من أجل الفضاءات الخطية المنظمة – مع الإثبات – .

مبرهنة (٥) – مبرهنة (هان – باناخ):

ليكن f دالياً خطياً معرفاً على الفضاء الجزئي S من الفضاء الخطي المنظم E.

عندئذ يوجد دالي خطي محدود $\tilde{f}$ على E بحيث يكون:

$$\tilde{f}(s)=f(s)\ ;\ \forall s\in S$$

$$\|\tilde{f}\|_E=\|f\|_S$$

حيث هنا:

$$\|\tilde{f}\|_E=\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\le 1}}|\tilde{f}(x)|\quad \&\quad \|f\|_S=\sup_{\substack{s\in S\\ \|x\|\le 1}}|f(s)|$$

الإثبات:

إذا كان $S=\{\theta\}$ فإن $f=0$. وفي هذه الحالة يكون $\tilde{f}=0$.

لنفترض الآن أن $S\neq\{\theta\}$. ولنضع:

$$p(x)=\|f\|_S\cdot\|x\|\ ;\ x\in E \qquad (11)$$

ولنبين أن $p(x)$ دالي خطي جزئي على E.

(i) من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من E فإن:

$$p(x_1+x_2)=\|f\|\|x_1+x_2\|\le\|f\|(\|x_1\|+\|x_2\|)$$
$$=\|f\|\|x_1\|+\|f\|\|x_2\|=p(x_1)+p(x_2)$$

(ii) من أجل أي عنصر x من E وأي عدد $\alpha>0$ لدينا:

$$p(\alpha x)=\|f\|\|\alpha x\|=|\alpha|\|f\|\|x\|=\alpha\|f\|\|x\|=\alpha p(x)$$

إذن p دالي خطي جزئي فعلاً .

بما أن f محدود بالفرض على S فيكون:

$$|f(s)| \le \|f\|_S \|s\| \quad ; \ \forall s \in S$$

أي أن:

$$|f(s)| \le p(s)$$

وبالتالي:

$$f(s) \le p(s) \quad ; \ \forall s \in S$$

بذلك تكون شروط المبرهنة (٤) محققة. إذن يوجد دالي خطي $\tilde{f}$ على E بحيث إن:

$$\tilde{f}(s) = f(s) \quad ; \ \forall s \in S$$

$$\tilde{f}(x) \le p(x) \quad ; \ \forall x \in E$$

لدينا الآن بحسب (11) :

$$\tilde{f}(x) \le \|f\| \|x\| \qquad (12)$$

ولكن وبما أن:

$$\tilde{f}(-x) \le \|f\| \|-x\| \quad ; \ \forall x \in E$$

أي أن:

$$-\tilde{f}(x) \le \|f\| \|-x\| \quad ; \ \forall x \in E \qquad (13)$$

فنجد من (12) و(13) أن: $|\tilde{f}(x)| \le \|f\| \|x\| \quad ; \ \forall x \in E$

إذن الدالي $\tilde{f}$ محدود ويكون:

$$\|\tilde{f}\|_E \le \|f\|_S \qquad (14)$$

لدينا الآن:

$$\|\tilde{f}\|_E = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \le 1}} |\tilde{f}(x)| \ge \sup_{\substack{s \in S \\ \|s\| \le 1}} |\tilde{f}(s)| = \sup_{\substack{s \in S \\ \|s\| \le 1}} |f(s)| = \|f\|_S$$

أي أن:

$$\|\tilde{f}\| \ge \|f\| \qquad (15)$$

من (14) و(15) يكون $\|\tilde{f}\|_E = \|f\|_S$ وهو المطلوب.

اعتماداً على مبرهنة (هان - باناخ) الأخيرة يمكننا إثبات المبرهنة الآتية – والتي تعد كنتيجة منها – .

مبرهنة (٦) :

$\bar{f}$ دائماً يوجد تمديد بالنظيم ونظيمه 1.

ليكن E فضاء خطياً منظماً. عندئذ من أجل $E \ni x \neq \theta$ يوجد دالي خطي وحيد $\bar{f}$ على E بحيث يكون: $\bar{f}(x) = \|x\|$ و $\|\bar{f}\| = 1$

الإثبات:

لنأخذ الفضاء الخطي الجزئي S من E حيث:

$$S = \{ s \in E : s = \alpha x \ ; \ x \in E , \alpha \in R \}$$

أي أن S هو الفضاء الجزئي المولد بالعنصر x. ولنعرف على S دالياً خطياً f بالشكل:

$$f(s) = f(\alpha x) = \alpha \|x\| \qquad (16)$$

إن f هذا خطي فعلاً لأنه من أجل أي عنصرين s_1 و s_2 من S يوجد عددان حقيقيان α_1 و α_2 بحيث يكون: $s_1 = \alpha_1 x \ , s_2 = \alpha_2 x$

وبالتالي من أجل أي عددين λ_1 و λ_2 يكون لدينا:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) &= f(\lambda_1 \alpha_1 x + \lambda_2 \alpha_2 x) \\ &= f[(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) x] = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2)\|x\| \\ &= \lambda_1 \alpha_1 \|x\| + \lambda_2 \alpha_2 \|x\| = \lambda_1 f(s_1) + \lambda_2 f(s_2) \end{aligned}$$

إضافة لذلك فإن f محدود لأنه من أجل أي s من S يكون :

$$|f(s)| = |f(\alpha x)| = |\alpha| \|x\| = \|\alpha x\| = \|s\|$$

وبالتالي فإن:

$$\|f\|_S = 1$$

وحسب المبرهنة (٥) يوجد دالي خطي $\bar{f}$ بحيث يكون:

$$\|\bar{f}\|_E = \|f\|_S = 1$$

من العلاقة (16) نجد من أجل $\alpha = 1$ أن:

$$\bar{f}(x) = f(x) = \|x\| \ ; \ \theta \neq x \in E$$

وهو المطلوب .



نتيجة (١) :

ليكن E فضاء خطياً منظماً. عندئذٍ ينتج من المبرهنة السابقة أنه من أجل أي $x \in E$ يكون:

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \qquad (17)$$

ذلك لأنه وحسب المبرهنة (٦) يكون :

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{|\bar{f}(x)|}{\|\bar{f}\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\| \qquad (18)$$

لكن من أجل أي دالي خطي محدود f يكون:

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$$

وبالتالي:

$$\sup_{\substack{f \in E^* \\ f \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\| \qquad (19)$$

من المتراجحتين (18) و(19) نحصل على المساواة (17) المطلوبة.

بشكل خاص إذا كان $f(x) = 0$ فيكون عندئذ $x = \theta$.

(٦-٣) الشكل العام للداليات الخطية في بعض الفضاءات المنظمة :

(General form of linear functionals on normed spaces)

١- الفضاء $\mathbb{R}^n$:

معلوم أن كل عنصر $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ من الفضاء $\mathbb{R}^n$ يكتب بالشكل:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

حيث $(e_i)_{i=1}^{n}$ قاعدة في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

ليكن f دالياً خطياً معرفاً على الفضاء $\mathbb{R}^n$ عندئذ :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \qquad (20)$$

بمعرفة الأعداد f_i نكون قد عرفنا دالياً خطياً على $\mathbb{R}^n$، وهو الشكل العام للدالي الخطي على الفضاء $\mathbb{R}^n$. بالتالي الفضاء المرافق للفضاء $\mathbb{R}^n$ هو أيضاً فضاء ذو n بعداً ولكن النظيم في الفضاء $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ يختلف بشكل عام عن النظيم في $\mathbb{R}^n$.

فلو أخذنا في $\mathbb{R}^n$ النظيم $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |\xi_i|$

عندئذٍ:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i||f_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x\|$$

أي أن:

$$\|f\| \le \sum_{i=1}^{n} |f_i| \qquad (21)$$

من جهة أخرى إذا أخذنا العنصر x_0 من الفضاء $\mathbb{R}^n$ بحيث:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} Sign f_i \, e_i$$

حيث:

$$Sign\,\lambda = \begin{cases} \dfrac{|\lambda|}{\lambda} & if \quad \lambda \ne 0 \\ 0 & if \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

فنجد أن $\|x_0\| = 1$ وعندئذٍ يكون:

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} Sign f_i \, f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|\right)\|x_0\|$$

وبالتالي:

$$\|f\| \ge \sum_{i=1}^{n} |f_i| \qquad (22)$$

من المتراجحتين (21) و (22) نجد: $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$

وهو النظيم في $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$.

وإذا أخذنا النظيم في $\mathbb{R}^n$ من الشكل:

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

فعندئذٍ النظيم في $\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ يكون أيضاً من الشكل: $\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{n}f_i{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

في الحقيقة :

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i f_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|\xi_i||f_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|x\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي فإن :

$$\|f\|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ومن جهة ثانية إذا أخذنا $x_0=\left(f_1,f_2,\dots,f_n\right)$ فإننا نجد :

$$|f(x_0)|=\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|x_0\|\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي فإن :

$$\|f\|\ge\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ومنه نجد أنّ :

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

٢- الفضاء C_0 (فضاء المتتاليات العددية المتقاربة من الصفر) :

يمكن صياغة الدالي الخطي المستمر المعرف على الفضاء C_0 بالشكل:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i\,\xi_i \quad ;x\in C_0\ ,\ f_i=f(e_i)$$

$$e_1=(1,0,0,....),e_2=(0,1,0,....),......$$

حيث : $\|f\|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|<\infty$.

الفضاء المرافق للفضاء C_0 هو الفضاء ℓ_1.

في الحقيقة إذا كانت لتكن $\{e_1,e_2,...,e_n,....\}$ قاعدة في C_0 عندئذٍ من أجل أي عنصر $x\in C_0$ يمكن أن نكتب : $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$

إن الدالي الخطي المستمر المعرف على C_0 هو:

$$f(x)=f\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\,e_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i$$

أي أن :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i \qquad (23)$$

لدينا $\|x\|=\sup_i|\xi_i|$ هو النظيم في C_0 وبالتالي يكون لدينا :

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i||f_i|\le\sup_i|\xi_i||f_i|=\|x\|\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|$$

وبالتالي فإن :

$$\|f\|\le\sum_{i=1}^{\infty}|f_i| \qquad (24)$$

من ناحية أخرى إذا أخذنا العنصر x_0 من C_0 بحيث : $x_0=\sum_{i=1}^{\infty}Sign f_i\,e_i$ فإن:

$\|x_0\|=1$ حيث :

$$Sign\ \lambda = \begin{cases} \frac{|\lambda|}{\lambda} & if\ \lambda \neq 0 \\ 0 & if\ \lambda = 0 \end{cases}$$

ويكون لدينا :

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} sign f_i\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} sign f_i . f_i = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \|x_0\|$$

$(\overset{*}{C_0}) = \ell_1$

وبالتالي فإن :

$$\|f\| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \qquad (25)$$

بمقارنة (24),(25) نجد أن :

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_1 وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق للفضاء C_0 هو الفضاء ℓ_1 .

٣- الفضاء ℓ_1:

لنأخذ (e_i) قاعدة شاودر للفضاء ℓ_1 عندئذ كل عنصر x من ℓ_1 يكتب بالشكل:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$$

ليكن f دالياً خطياً محدوداً. عندئذ:

$\overset{*}{\ell_1} = \ell_\infty$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i \qquad (26)$$

$\overset{**}{C_0}$

حيث $f(e_i) = f_i$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f.

$\overset{*}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$

ولما كان $\|e_i\| = 1$ فإن:

$\overset{**}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$

$$|f_i| = |f(e_i)| \leq \|f\| \|e_i\| = \|f\|$$

أي:

$$\sup_i |f_i| \leq \|f\| \qquad (27)$$

$\overset{*}{\ell_p} = \ell_q$

$\overset{*}{\ell_2} = \ell_2$

فإن $(f_i) \ni \ell_\infty$.

من جهة أخرى ومن أجل كل عنصر من ℓ_∞ وليكن $\zeta = (\zeta_i)$ يمكننا إيجاد دالي خطي محدود g على ℓ_1 بحيث يكون:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \, \zeta_i$$

حيث $x = (\xi_i) \ni \ell_1$.

نلاحظ أن $g \ni \ell_1^*$ لأن g خطي ومحدود وأن:

$$|g(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . \zeta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \right) \sup_i |\zeta_i| = \|x\| \sup_i |\zeta_i|$$

من العلاقة (26) نجد:

$$|f(x)| \le \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i . f_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \right) \sup_i |f_i| = \|x\| \sup_i |f_i|$$

بأخذ $\|x\| = 1$ نجد:

$$\|f\| \le \sup_i |f_i| \qquad (28)$$

من المتراجحتين (27) و (28) نستنتج:

$$\|f\| = \sup_i |f_i|$$

وهذا يعني أن نظيم f ليس إلا النظيم على الفضاء ℓ_∞. وبالتالي نجد أن الفضاء المرافق ℓ_1 هو الفضاء ℓ_∞.

٤- الفضاء ℓ_∞:

وفي النتيجة [illegible] إيزومورفيزم. وبذلك ننتهي الإثبات.

٥- الفضاء ℓ_p: هام جداً.

لنأخذ (e_k) قاعدة للفضاء ℓ_p $(1<p<\infty)$. عندئذٍ كل عنصر $\ell_p \ni x=(\xi_n)$ يكتب بشكل وحيد كما يلي:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$$

لنفرض أن f دالياً خطياً على الفضاء ℓ_p عندئذٍ يكون:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k f(e_k) \qquad (40)$$

عندئذٍ $\zeta_k=f(e_k)$ تتعرف بشكل وحيد بواسطة الدالي f، ويكون:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \cdot\zeta_k \qquad (41)$$

لنأخذ $x_n=\left(\xi_k^{(n)}\right)$ حيث:

$$\xi_k^{(n)}=\begin{cases}|\zeta_k|^{q-1}\,Sign\,\zeta_k & if \quad k\le n \quad and \quad \zeta_k\neq 0\\ 0 & if \quad k>n \quad or \quad \zeta_k=0\end{cases}$$

نطبق الدالي f على العنصر x_n مع العلم أن مرافق p هو q وأن $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فنجد:

$$f(x_n)\le\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(n)}\zeta_k=\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q \qquad (42)$$

من جهة ثانية لدينا:

$$|f(x_n)|\le\|f\|\,\|x_n\|=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^{q}\right)^{\frac{1}{p}}$$

بهذا الشكل نجد بالاعتماد على (42) أن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q \leq \|f\| \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه نستنتج أن:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$$

وبما أن n كيفي نجد عندما $n\to\infty$ أن:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\| \qquad (43)$$

وبالتالي $(\zeta_k)\in\ell_q$.

وبالعكس إذا أخذنا متتالية اختيارية $\{d_k\}$ من الفضاء ℓ_q عندئذٍ يكون:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k\,\zeta_k$$

دالي خطي محدود على الفضاء ℓ_p.

لنوجد نظيم الدالي f باستخدام متراجحة هولدر والعلاقة (41) لنجد:

$$|f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\,\zeta_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|$$

أي أن:

$$\|f\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\zeta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (44)$$

من المتراجحتين (43) و (44) نجد:

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

مما سبق نجد أن الفضاء المرافق لـ ℓ_p هو الفضاء ℓ_q حيث $1 < p < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

نتيجة (٢) :

إذا وضعنا $p = 2$ فنجد أن الفضاء المرافق لـ ℓ_2 هو ℓ_2 نفسه والشكل العام للدالي الخطي f هو من الشكل:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \zeta_k$$

حيث: $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^2 < +\infty$

والنظيم للدالي f يكون:

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



مطلوب

جدول: الشكل العام للداليات لبعض الفضاءات التابعية

الفضاء	تمثيل الدالي في الفضاء	الفضاء المرافق	النظيم فيه
فضاء منته البعد E^n	إذا كان $\|x\| = \|\xi_1\| + \sum_{k=1}^{n-1} \|\xi_{k+1}-\xi_k\|$ وإذا كان $f(x)=a_1\xi_1+\sum_{k=1}^{n-1} a_k(\xi_{k+1}-\xi_k)$	E_1^n	$\|f\| = \max_{1\le k\le n}\|a_k\|$
فضاء منته البعد E^n	إذا كان $\|x\|=\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|$ و إذا كان $f(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k\xi_k$	E_2^n	$\|f\|=\max_{1\le k\le n}\left\|\sum_{i=k}^{n} b_i\right\|$
C	$\|x\|=\sup_{1\le i\le\infty}\|x_i\|$ $f(x)=a\lim_{k\to\infty}x_k+\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k$ $x=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\in C$ وأن a، $\{a_k\}$ من ℓ_1	ℓ_1	$\|f\|=\|a\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|$
C_0	$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f_i$ $x=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}\in C_0$	ℓ_1	$\|f\|=\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|$
ℓ_1	$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i\,\xi_i$	ℓ_∞	$\|f\|=\sup_{1\le i\le\infty}\|f_i\|<\infty$
$(0<p\le 1)\ \ell_p$	$\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p$	ℓ_∞	$\sup_{x}\left\{\|f(x)\|\cdot\|x\|^{-\frac{1}{p}}\|, x\ne\theta\right\}$
$(1<p<\infty)\ \ell_p$	$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k$ $\{a_k\}$ من ℓ_q و $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	ℓ_q	$\|f\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$
	$f(x) = \int x\,d\mu$ for each $x \in \ell$		